Fibonacci-Wachstum

Axel König

Es werden stetige Wachstumsfunktionen vorgestellt, die diskretes additives Wachstum nach Fibonacci optimal approximieren. Darüber hinaus wird die Vermutung aufgestellt, dass es für unendliche Fibonacci-Folgen und deren Partialsummenfolgen keine genaueren Näherungen als die nachfolgend vorgeschlagenen Funktionen gibt.

1. Diskretes Wachstum nach *Fibonacci*

Bildet man aus ganzrationalen Zahlen eine Zahlenfolge

$$(a_k) = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad a_k \in \mathbf{Z} \qquad k \in \mathbf{N} \qquad /1/$$

durch die Anwendung der simplen Regel, dass alle Glieder die Summe ihrer beiden vorhergehenden Glieder sind, so läßt sich dieses rekursive Bildungsgesetz

$$a_k = a_{k-2} + a_{k-1} \qquad k > 1 \qquad /2/$$

definitionsgemäß nicht auf die ersten beiden Glieder a_0 und a_1 anwenden, die somit unabhängig sind. Je nach Kombination dieser beiden Unabhängigen erhält man dann ab Glied a_2 entweder eine monoton wachsende oder eine monoton fallende Zahlenfolge aus ganzrationalen Zahlen. Nur die Kombination $a_0 = 0$ und $a_1 = 0$ ergibt gemäß dem Bildungsgesetz /2/ eine Folge von Nullen.

Dieses Wachstum wird als „diskret“ - oder vielfach auch als „integer“ - bezeichnet, da sich von einem Wachstumsschritt zum nächsten eine Vermehrung nur in ungebrochenen („unverletzten“) Einheiten einstellen kann. Dies ist eine wichtige Bedingung für „Natürliches Wachstum“ - bei dem dann allerdings in der Regel nur positive Mengen relevant sind.

Bildet man nun (für $k > 0$) aus jedem Glied a_k einer solchen Folge nach /1/ und /2/ und seinem Vorgängerglied a_{k-1} den Quotienten, so erkennt man, dass sich dieses Verhältnis mit ansteigendem k - in Abhängigkeit der beiden Unabhängigen a_0 und a_1 mehr oder weniger schnell - dem *Goldenen Schnitt*

$$f = \frac{1}{f} + 1 = f^2 - 1 = 2 \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1} = 1{,}618033989\ldots \qquad /3/$$

nähert. Die Entdeckung dieses Zusammenhanges wird *Leonardo von Pisa* (ca.1180 bis 1250) zugeschrieben, der unter seinem Rufnamen *Fibonacci* bekannt wurde. (Deshalb werden im Folgenden generell alle Folgen gemäß /1/ und /2/ und deren Partialsummenfolgen /9/ als „Folgen nach *Fibonacci*“ bezeichnet.) Entsprechend den unter /3/ aufgeführten Zusammenhängen, ist das Verhältnis des *Goldenen Schnittes f* unschwer als positive Lösung der folgenden quadratischen Gleichung zu identifizieren:

$$f^2 - f - 1 = 0 \qquad /4/$$

Wegen der (mit einem Fehler von nur +1,0 ‰ recht guten) Näherung an die Kreiszahl

$$p \approx \frac{4}{\sqrt{f}} \qquad /5/$$

ist das Verhältnis des *Goldenen Schnittes* außerdem unverzichtbar für alle, die zeichnerisch Quadrate in Kreise (oder umgekehrt) „umwandeln“ wollen.

Also: Obwohl jede Folge nach /1/ und /2/ durch Addition – „additiv“ - generiert wurde, konvergiert sie mit fortschreitendem Wachstum zu einer geometrischen Folge mit dem Wachstumsfaktor *f*. Ob dies nun erstaunlich oder schlicht trivial ist, sei einmal dahingestellt.

Hierbei genießen zwei Folgen eine herausragende Stellung : Die berühmte *Fibonacci-Folge*

$$(a_k)_{(0;1)} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots \qquad /6/$$

wird von den Unabhängigen $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ bedingt, und mit $a_0 = 2$ und $a_1 = 1$ erhält man eine interessante Folge, die nach ihrem Entdecker *Lukas-Folge* heißt:

$$\left(a_k\right)_{(2;1)} = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots \qquad /7/$$

Bildet man nun aus den Folgen nach /1/ und /2/, ausgehend vom Anfangszustand a_0, endliche Reihen, die sogenannten „Partialsummen“

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad a_k, s_n \in \mathbf{Z} \qquad k, n \in \mathbf{N} \qquad /8/$$

mit n als Anzahl der Entwicklungsschritte, so lassen sich diese Partialsummen wiederum zu streng monoton wachsenden bzw. fallenden „Partialsummenfolgen“ sequenzieren:

$$\left(s_n\right) = s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots \qquad s_n \in \mathbf{Z} \qquad n \in \mathbf{N} \qquad /9/$$

Führt man dies mit der *Fibonacci-Folge* /6/ durch, so erhält man als Ergebnis jene Zahlenfolge, deren einzelne Glieder die diskreten Mengen nach abgeschlossenen „natürlichen“ Entwicklungsschritten darstellen und die deshalb in den meisten Kulturen eine herausragende Bedeutung haben oder gar als heilig gelten. Sie stehen allgemein für Einheit und Vollständigkeit - also durchaus für „diskrete Mengen“:

$$\left(s_n\right)_{(0;1)} = 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, \ldots \qquad /10/$$

Beachte: Um den Mengen<u>zuwachs</u> durch n Entwicklungsschritte zu erhalten, muss von der Partialsumme s_n die Anfangsmenge $s_0 = a_0$ subtrahiert werden !

2. Berechnung diskreter Werte für das Wachstum nach *Fibonacci*

Möchte man die diskreten Folgeglieder bzw. ihre Partialsummen berechnen, ohne zuerst die gesamte Folge additiv generieren zu müssen, so bedarf es Funktionen in Abhängigkeit der beiden Anfangsglieder und der Zahl der Entwicklungsschritte:

$$a_k = f\,(a_0, a_1, k) \qquad /11/$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f\,(a_0, a_1, n) \qquad /12/$$

Eine exakte Berechnung ist aber nicht immer möglich. Für einige wenige, mathematisch herausragende Anfangsbedingungen werden in diesem Abschnitt exakte, aber unstetige Gleichungen aufgezeigt. Generell ist jedoch die stetige Approximation nach Abschnitt 3 möglich.

Die Einführung des sogenannten „Anfangsterms“

$$\boxed{A(a_0;a_1) = \frac{a_0 + a_1 f}{f + 2}} \qquad /13/$$

ermöglicht im Weiteren eine durchgängige Formulierung des *Wachstums nach Fibonacci*. Damit gilt gemäß der Forderung /11/ für beliebige Folgen nach *Fibonacci* der generelle Ansatz

$$\boxed{a_k = A(a_0;a_1)\, Z(k)} \qquad /14/$$

und gemäß Forderung /12/ für beliebige Partialsummen bzw. Partialsummenfolgen:

$$\boxed{s_n = A(a_0;a_1)\, Z(n+2) - a_1} \qquad /15/$$

2.1 Wachstum aus dem „Nichts“

Für die Anfangsbedingung $a_0 = 0$ (Fibonacci-Wachstum ohne Ausgangsmenge) ist der unstetige Wachstumsterm Z, der die exakte Berechnung von diskreten Werten ermöglicht, bekannt:

$$Z_{(0;a_1)} = f^m - (1-f)^m \qquad a_0 = 0 \qquad m \in \mathbf{N} \qquad /16/$$

Hierbei wird für Folgeglieder $m = k$ und für Partialsummen $m = n+2$ gesetzt. Mit der Anfangsbedingung $a_0 = 0$ spezifizieren sich der Anfangsterm /13/ zu

$$A_{(0;a_1)} = \frac{a_1}{\sqrt{5}} \quad , \qquad a_0 = 0 \qquad /17/$$

das Folgeglied /14/ zu

$$\boxed{a_{k(0;a_1)} = \frac{a_1}{\sqrt{5}}\left(f^k - (1-f)^k\right)} \qquad a_0 = 0 \qquad k \in \mathbf{N} \qquad /18/$$

und die Partialsumme /15/ zu:

$$\boxed{s_{n(0;a_1)} = \frac{a_1}{\sqrt{5}}\left(f^{n+2} - (1-f)^{n+2}\right) - a_1} \qquad a_0 = 0 \qquad n \in \mathbf{N} \qquad /19/$$

Dieser Vorgabe gehorcht natürlich auch die *Fibonacci-Folge* /6/ mit $a_1 = 1$. In /18/ eingesetzt ergibt sich die wohlbekannte, nach dem Mathematiker *J.P.M. Binet* (1786-1856) benannte, *Binet-Formel*:

$$a_{k(0;a_1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(f^k - (1-f)^k\right) \qquad a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad k \in \mathbf{N} \qquad /20/$$

2.2 Wachstum nach *Lukas*

Für das Verhältnis der Anfangsglieder $a_0 = 2a_1$ lassen sich ebenfalls alle Folgeglieder und Partialsummen exakt bestimmen. Folgen gemäß dieser Bedingung heißen - über die spezielle Gleichung /7/ hinaus - *Lukas-Folgen.* Für sie vereinfacht sich der Anfangsterm /13/ zu:

$$A_{(2a_1;a_1)} = a_1 \qquad a_0 = 2a_1 \qquad /21/$$

Mit $m = k$ für Folgeglieder und $m = n+2$ für Partialsummen gilt hier für das (unstetige) Wachstumsglied:

$$Z_{(2a_1;a_1)} = f^m + (1-f)^m \qquad a_0 = 2a_1 \qquad m \in \mathbf{N} \qquad /22/$$

Somit ergeben sich für jede *Lukas-Folge* das Folgeglied /14/ zu

$$\boxed{a_{k(2a_1;a_1)} = a_1\left(f^k + (1-f)^k\right)} \qquad a_0 = 2a_1 \qquad k \in \mathbf{N} \qquad /23/$$

und die Partialsumme /15/ zu:

$$\boxed{s_{n(2a_1;a_1)} = a_1\left(f^{n+2} + (1-f)^{n+2}\right) - a_1} \qquad a_0 = 2a_1 \qquad n \in \mathbf{N} \qquad /24/$$

Anmerkung: Alle oben im Abschnitt 2 aufgeführten Funktionen enthalten irrationale Zahlen. Deshalb stellt sich natürlich die Frage, ob deren „ganzzahlige“ Funktionswerte rationaler oder irrationaler Art sind.

3. Approximation des diskreten Wachstums durch stetige Funktionen

Für die nicht unter die Bedingungen der Abschnitte 2.1 und 2.2 fallenden Kombinationen von a_0 und a_1 ist eine exakte Berechnung der Folgeglieder und Partialsummen nach /11/ bzw. /12/ nicht möglich. Allerdings besteht für beliebige Anfangsbedingungen immer die Möglichkeit, die unten vorgestellten stetigen Approximationsgleichungen zur Berechnung der Glieder von Folge und Partialsummenfolge zu nutzen und bei Bedarf mittels Rundung zu diskretieren.

Für solche stetigen Approximationen führt der erste Griff zu den bekannten Exponentialgleichungen der *Geometrischen Reihe*. (Zur Unterscheidung von den exakten Werten werden die Begriffe der stetigen Approximationen mit dem Buchstaben „s“ indiziert.) Mit dem Wachstumsfaktor q ergibt sich das k-te Glied (der k-te Entwicklungsschritt) einer jetzt exponentiell wachsenden Zahlenfolge analog zu /1/, aber mit reellen anstatt der ganzrationalen Glieder:

$$a_{ks} = a_{0s}\, q^{k} \qquad /25/$$

Für die Partialsumme (Reihe) nach n Entwicklungsschritten gilt:

$$s_{ns} = \sum_{k=0}^{n} a_{ks} = a_{0s}\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad k,n \in \mathbf{N} \qquad /26/$$

Ersetzen wir nun q durch den speziellen Wachstumsfaktor f, den Grenzwert des Fibonacci-Wachstums, so stellt sich das Problem in Form des stetigen Anfangsgliedes a_{0s}; es ist unbekannt und muss für die Gleichungen /25/ und /26/ erst aufwendig mittels geeigneter mathematischer Verfahren approximiert werden.

Wünschenswert wären deshalb auch hier stetige Wachstumsfunktionen nach /11/ und /12/, die in Abhängigkeit der Entwicklungsschritte k bzw. n und der diskreten Unabhängigen a_0 und a_1 additives Wachstum nach *Fibonacci* optimal approximieren. Diese Gleichungen werden im Weiteren vorgestellt.

Der für die Ansätze /14/ und /15/ benötigte stetige Wachstumsterm *Z(m)* ergibt sich auf einfache Weise, in dem das unstetige Glied $(1-f)^{m}$ aus /16/ und /22/ vernachlässigt wird:

$$Z(m) = f^{m} \qquad /27/$$

Der bereits in Abschnitt 2 vorgestellte Anfangsterm /13/

$$\boxed{A(a_0;a_1) = \frac{a_0 + a_1 f}{f+2}} \qquad /28/$$

ist das unbekannte Anfangsglied a_{0s} der Gleichung /25/. Hiermit ergibt sich die gesuchte stetige Approximation einer beliebigen Folge nach *Fibonacci* durch /27/ in /14/ mit $m = k$:

$$\boxed{a_{ks} = A\, f^{k}} \qquad /29/$$

Mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ der *Fibonacci-Folge* /6/ erhalten wir die stetige Form der *Binet-Formel*:

$$a_{ks(0;1)} = \frac{f^{k}}{\sqrt{5}} \qquad a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad /30/$$

Durch /27/ in /15/ mit $m = n+2$ ergibt sich die stetige Approximation einer Partialsummenfolge nach *Fibonacci*:

$$\boxed{s_{ns1} = A\, f^{n+2} - a_1} \qquad /31/$$

Mit den Vorgaben $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ der *Fibonacci-Folge* /6/ ergibt sich vereinfacht:

$$s_{ns1(0;1)} = \frac{f^{n+2}}{\sqrt{5}} - 1 \qquad a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad /32/$$

Ist anstatt der Anzahl der Entwicklungsschritte n das (diskrete) n-te Glied a_n einer Folge nach *Fibonacci* bekannt, so lässt sich deren Partialsumme s_n auch durch die Beziehung

$$\boxed{s_{ns2} = a_n f^{2} - a_1} \qquad n \in \mathbf{N} \qquad /33/$$

nähern. Wie im folgenden Abschnitt 4 ausgeführt wird, erreicht /33/ allerdings nicht die hohe Genauigkeit der Näherung /31/.

Die Güte der Gleichungen der Abschnitte 2 und 3 - ob nun wohlbekannt oder neu vorgestellt - lässt sich am Beispiel der *Lukas-Folge* /7/ und ihrer Partialsummenfolge dem numerischen Arbeitsblatt *Tabelle 1* entnehmen.

4. Fehlerbetrachtung der stetigen Approximationen

Bildet man zwischen jedem diskreten Glied einer unendlichen Folge nach *Fibonacci* und seiner Approximation nach /29/ das sogenannte Fehlerquadrat

$$\Delta a_k{}^2 = (a_{ks} - a_k)^2 \qquad k \in \mathbf{N} \qquad /34/$$

und bildet aus ihnen wiederum eine unendliche Reihe, so konvergiert der Wert dieser unendlichen Reihe - wie bereits oben angedeutet - zu einem endlichen Grenzwert größer null. Dieser Grenzwert einer unendlich fortschreitenden Aufsummierung der Fehlerquadrate wird im Folgenden vereinfacht als „Summe der Fehlerquadrate" bezeichnet.

Durch Einführung des Terms

$$\boxed{B(a_0;a_1) = (a_1 - a_0 f)^2} \qquad /35/$$

ergibt sich die Summe der Fehlerquadrate für die Approximation einer unendlichen Folge nach *Fibonacci* für Gleichung /29/ zu:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k{}^2 = \frac{f}{5} B} \qquad k \in \mathbf{N} \qquad /36/$$

Aufgrund der Gültigkeit dieser Gleichung /36/ kann vermutet werden, dass es sich bei der Funktion /29/ um die bestmögliche stetige Approximation an jede unendliche Folge nach *Fibonacci* handelt.

Völlig analog hierzu lassen sich die Fehlerquadrate für Approximationen an unendliche Partialsummenfolge nach *Fibonacci*

$$Ds_n{}^2 = (s_{ns} - s_n)^2 \qquad n \in \mathbf{N} \qquad /37/$$

behandeln. Wurde die Partialsummenfolge nach /31/ approximiert, so liefert

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \Delta s_{n1}{}^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{5} B} \qquad n \in \mathbf{N} \qquad /38/$$

den gesuchten Wert und für die Näherung /33/ ergibt sich die Summe der Fehlerquadrate zu:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \Delta s_{n2}{}^2 = f B} \qquad n \in \mathbf{N} \qquad /39/$$

Da der Koeffizient f dieser Gleichung um den Faktor 34,... größer als der Koeffizient $\left(\sqrt{5}-2\right)/5$ aus /38/ ist, ist die Näherung /31/ der Funktion /33/ vorzuziehen.

Aufgrund der Gültigkeit von Gleichung /38/ kann auch hier vermutet werden, dass Gleichung /31/ die bestmögliche stetige Approximation an jede unendliche Partialsummenfolge nach *Fibonacci* darstellt.

In *Tabelle 2* sind einige ausgewählte Fehlerquadratsummen nach /36/, /38/ und /39/ ausgewiesen.

Des weiteren erkennt man, dass eine Minimierung des Terms /35/ (durch Abstimmung von a_0 und a_1), sowohl für die unendliche Folge nach *Fibonacci*, als auch für deren Partialsummenfolge das Minimum der Summe der Fehlerquadrate bedingt.

Geht man nun von der „natürlichen" Problemstellung aus, dass etwas in diskreten Einheiten mit $a_0 = 0$ aus dem „Nichts" (in das Positive) wachsen soll, so finden wir mit $a_1 = 1$ das Minimum $B_{(0;1)} = 1$. Somit ist jetzt mathematisch bestimmt, wie der erste Wachstumsschritt einer solchen Folge nach *Fibonacci* aussehen sollte:

Die beste diskrete Annäherung an exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor f ist bei einer Ausgangsmenge von null ein erster Wachstumsschritt von nur einer Einheit. Dies erscheint auch vollkommen plausibel, ist dies ist doch für einen ersten Schritt das absolute Minimum. Relativ betrachtet ist dieser minimale Schritt allerdings sehr groß - nämlich unendlich groß.

Letztendlich erhalten wir nun jene berühmte *Fibonacci-Folge*, die „Mutter Natur“ stets anwendet, wenn etwas in diskreten Einheiten, exponentiell und zugleich aus dem „Nichts“ erwachsen soll:

$$\left(a_k\right)_{(0;1)} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Quellen:

Lexikographisches Institut München:

Das Bertelsmann-Lexikon in 24 Bänden, 1995/96, Bertelsmann-Verlag

Bartsch, Hans-Jochen:

Taschenbuch Mathematischer Formeln, 18. Auflage 1999, Fachbuchverlag Leipzig

Knott, Ron:

The Mathematics of the Fibonacci series, 29.08.2000, www.mcs.surrey.ac.uk/personal/R.Knott

Tabelle 2:

				f =	1,618033989
a_0	a_1	$B = (a_1 - a_0 f)^2$	$\Sigma\ \Delta a_k^2 = B f/5$	$\Sigma\ \Delta s_{n1}^2 = B(5^{1/2}-2)/5$	$\Sigma\ \Delta s_{n2}^2 = B f$
		/35/	/36/	/38/	/39/
0	1	1	0,323606798	0,047213595	1,618033989
0	2	4	1,294427191	0,188854382	6,472135955
0	3	9	2,91246118	0,424922359	14,5623059
0	4	16	5,177708764	0,755417528	25,88854382
0	5	25	8,090169944	1,180339887	40,45084972
0	10	100	32,36067977	4,72135955	161,8033989
0	100	10000	3236,067977	472,135955	16180,33989
1	0	2,618033989	0,847213595	0,123606798	4,236067977
1	1	0,381966011	0,123606798	0,018033989	0,618033989
1	2	0,145898034	0,047213595	0,006888371	0,236067977
1	3	1,909830056	0,618033989	0,090169944	3,090169944
1	4	5,673762079	1,836067977	0,267878708	9,180339887
1	5	11,4376941	3,701315562	0,540014663	18,50657781
1	10	70,25735421	22,73575742	3,317102303	113,6787871
1	100	9679,011236	3132,193832	456,9809213	15660,96916
2	0	10,47213595	3,388854382	0,494427191	16,94427191
2	1	5	1,618033989	0,236067977	8,090169944
2	2	1,527864045	0,494427191	0,072135955	2,472135955
2	3	0,05572809	0,018033989	0,002631123	0,090169944
2	4	0,583592135	0,188854382	0,027553483	0,94427191
2	5	3,11145618	1,006888371	0,146903033	5,034441854
2	10	45,75077641	14,80526225	2,160058651	74,02631123
2	100	9363,25854	3030,014113	442,0731013	15150,07056
3	0	23,5623059	7,624922359	1,11246118	38,1246118
3	1	14,85410197	4,806888371	0,701315562	24,03444185
3	2	8,145898034	2,636067977	0,384597135	13,18033989
3	3	3,437694101	1,11246118	0,162305899	5,562305899
3	4	0,729490169	0,236067977	0,034441854	1,180339887
3	5	0,021286236	0,006888371	0,001005	0,034441854
3	10	26,48026657	8,569194269	1,250228595	42,84597135
3	100	9052,741913	2929,528821	427,4124948	14647,64411
10	10	38,19660113	12,36067977	1,803398875	61,80339887
10	100	7025,735421	2273,575742	331,7102303	11367,87871
100	10	23044,27191	7457,283039	1088,002933	37286,4152
100	100	3819,660113	1236,067977	180,3398875	6180,339887

$a_0 =$ **2** $A =$ 1 $f =$ 1,618033989

$a_1 =$ **1** $B =$ 5

$k; n$	$a_k = a_{k-2} + a_{k-1}$ /2/ /7/	$a_{k(0, a1)} = A(f^k - (1-f)^k)$ /18/	$a_{k(2a1, a1)} = A(f^k + (1-f)^k)$ /23/	$a_{ks} = A\,f^k$ /29/	$\Delta a_k^2 = (a_{ks} - a_k)^2$ /34/	$s_n = \Sigma a_k\,(0...n)$ /8/	$s_{n(0, a1)} = A(f^{n+2} - ...\,(1-f)^{n+2}) - a_1$ /19/	$s_{n(2a1, a1)} = A(f^{n+2} + ...\,(1-f)^{n+2}) - a_1$ /24/	$s_{ns1} = A\,f^{n+2} - a_1$ /31/	$\Delta s_{n1}^2 = (s_{ns1} - s_n)^2$ /37/	$s_{ns2} = a_n f^2 - a_1$ /33/	$\Delta s_{n2}^2 = (s_{ns2} - s_n)^2$ /37/
0	**2**	0	2	1	1	**2**	-1	2	1,618033989	0,145898034	4,236067977	5
1	**1**	2,236067977	1	1,618033989	0,381966011	**3**	4,854101966	3	3,236067977	0,05572809	1,618033989	1,909830056
2	**3**	2,236067977	3	2,618033989	0,145898034	**6**	4,854101966	6	5,854101966	0,021286236	6,854101966	0,729490169
3	**4**	4,472135955	4	4,236067977	0,05572809	**10**	10,70820393	10	10,09016994	0,008130619	9,472135955	0,27864045
4	**7**	6,708203932	7	6,854101966	0,021286236	**17**	16,5623059	17	16,94427191	0,00310562	17,32623792	0,106431181
5	**11**	11,18033989	11	11,09016994	0,008130619	**28**	28,27050983	28	28,03444185	0,001186241	27,79837388	0,040653094
6	**18**	17,88854382	18	17,94427191	0,00310562	**46**	45,83281573	46	45,97871376	4,53104E-04	46,1246118	0,0155281
7	**29**	29,06888371	29	29,03444185	0,001186241	**75**	75,10332556	75	75,01315562	1,73070E-04	74,92298567	0,005931206
8	**47**	46,95742753	47	46,97871376	4,53104E-04	**122**	121,9361413	122	121,9918694	6,61070E-05	122,0475975	0,002265519
9	**76**	76,02631123	76	76,01315562	1,73070E-04	**198**	198,0394669	198	198,005025	2,52506E-05	197,9705831	8,65351E-04
10	**123**	122,9837388	123	122,9918694	6,61070E-05	**321**	320,9756081	321	320,9968944	9,64488E-06	321,0181806	3,30535E-04
11	**199**	199,01005	199	199,005025	2,52506E-05	**520**	520,015075	520	520,0019194	3,68401E-06	519,9887638	1,26253E-04
12	**322**	321,9937888	322	321,9968944	9,64488E-06	**842**	841,9906831	842	841,9988138	1,40717E-06	842,0069444	4,82244E-05
13	**521**	521,0038388	521	521,0019194	3,68401E-06	**1363**	1363,005758	1363	1363,000733	5,37490E-07	1362,995708	1,84201E-05
14	**843**	842,9976275	843	842,9988138	1,40717E-06	**2206**	2205,996441	2206	2205,999547	2,05303E-07	2206,002653	7,03584E-06
15	**1364**	1364,001466	1364	1364,000733	5,37490E-07	**3570**	3570,002199	3570	3570,00028	7,84188E-08	3569,998361	2,68745E-06
16	**2207**	2206,999094	2207	2206,999547	2,05303E-07	**5777**	5776,998641	5777	5776,999827	2,99533E-08	5777,001013	1,02652E-06
17	**3571**	3571,00056	3571	3571,00028	7,84188E-08	**9348**	9348,00084	9348	9348,000107	1,14411E-08	9347,999374	3,92094E-07
18	**5778**	5777,999654	5778	5777,999827	2,99533E-08	**15126**	15125,99948	15126	15125,99993	4,37013E-09	15126,00039	1,49767E-07
19	**9349**	9349,000214	9349	9349,000107	1,14411E-08	**24475**	24475,00032	24475	24475,00004	1,66924E-09	24474,99976	5,72057E-08
20	**15127**	15126,99987	15127	15126,99993	4,37013E-09	**39602**	39601,9998	39602	39601,99997	6,37594E-10	39602,00015	2,18507E-08
21	**24476**	24476,00008	24476	24476,00004	1,66924E-09	**64078**	64078,00012	64078	64078,00002	2,43539E-10	64077,99991	8,34621E-09
22	**39603**	39602,99995	39603	39602,99997	6,37594E-10	**103681**	103680,9999	103681	103681	9,30237E-11	103681,0001	3,18797E-09
23	**64079**	64079,00003	64079	64079,00002	2,43539E-10	**167760**	167760	167760	167760	3,55316E-11	167760	1,21769E-09
24	**103682**	103682	103682	103682	9,30237E-11	**271442**	271442	271442	271442	1,35720E-11	271442	4,65120E-10
25	**167761**	167761	167761	167761	3,55316E-11	**439203**	439203	439203	439203	5,18405E-12	439203	1,77657E-10
26	**271443**	271443	271443	271443	1,35720E-11	**710646**	710646	710646	710646	1,98029E-12	710646	6,78610E-11
27	**439204**	439204	439204	439204	5,18405E-12	**1149850**	1149850	1149850	1149850	7,56243E-13	1149850	2,59190E-11
28	**710647**	710647	710647	710647	1,98029E-12	**1860497**	1860497	1860497	1860497	2,89020E-13	1860497	9,90029E-12
29	**1149851**	1149851	1149851	1149851	7,56243E-13	**3010348**	3010348	3010348	3010348	1,10235E-13	3010348	3,78148E-12
30	**1860498**	1860498	1860498	1860498	2,89020E-13	**4870846**	4870846	4870846	4870846	4,23628E-14	4870846	1,44562E-12
31	**3010349**	3010349	3010349	3010349	1,10235E-13	**7881195**	7881195	7881195	7881195	1,60427E-14	7881195	5,49574E-13
32	**4870847**	4870847	4870847	4870847	4,23628E-14	**12752042**	12752042	12752042	12752042	6,41501E-15	12752042	2,11667E-13
$\Sigma =$	**12752042**			$\Sigma =$	**1,618033989**				$\Sigma =$	**0,236067977**	$\Sigma =$	**8,090169944**
				$B\,f\,/5 =$	1,618033989				$B(5^{1/2}-2)/5 =$	0,236067977	$B\,f =$	8,090169944